Ing. GAETANO IVALDI

IL METODO SPERIMENTALE SECONDO LEONARDO DA VINCI

:: :: :: :: :: e sua applicazione alla teoria cinetica dei gas

:: :: :: *ESTRATTO* :: :: ::

dal Giornale "L'ELETTRICISTA"

Anno XXXI - S. IV - Vol. I - N. 10 - 1922

:: :: ROMA :: ::

Casa Edit. "L'ELETTRICISTA"

:: :: :: Via Cavour, 110 :: :: ::

Il metodo sperimentale secondo Leonardo da Vinci

e sua applicazione alla teoria cinetica dei gas

Il matematico Enrico Poincaré è stato, come si sa, uno strenuo e formidabile assertore del razionalismo. E dal suo razionalismo è stato tratto a negare, nei riguardi della matematica, il metodo sperimentale.

Poincaré dice che fra la matematica e l'esperienza deve esistere una separazione netta. Una formula, un principio, un risultato matematico non possono essere infirmati, secondo Poincaré, dall'esperienza. Essi possono dirsi erronei soltanto quando sono incompatibili con le premesse e le ipotesi da cui si parte per dedurli. E quando portano a contraddire tali premesse, tali ipotesi.

La ragione che induce Poincaré a questa conclusione è la seguente: Non v'ha risultato, egli dice, sia vero, sia erroneo, che non possa essere dedotto per mezzo di due ipotesi, di due presupposti convenientemente ed arbitrariamente scelti. Supponiamo di avere un dato di esperienza, e perciò vero, ed indubbiamente vero, secondo il metodo sperimentale. Noi possiamo sempre dedurlo per mezzo di due ipotesi convenientemente scelte, e tali che l'errore corrispondente ad una ipotesi abbia ad essere compensato da quello relativo all'altra. Ora secondo il metodo sperimentale una o più ipotesi sono vere in quanto le loro conseguenze sono confermate per vere dall'esperienza. Quindi, essendo vero il risultato, noi veniamo a poter dire che sono vere le ipotesi. Mentre, invece, possono non essere vere.

Questo asserto si basa sopra una erronea interpretazione del metodo sperimentale. Come insegna Leonardo da Vinci, secondo questo metodo dobbiamo dire:

Prima di ammettere una qualsiasi ipotesi noi dobbiamo fare una qualche esperienza, a fine di accertare se le conseguenze dell'ipotesi sono dall'esperienza confermate o no.

Però deve trattarsi di una ipotesi, e non già di due o più. Se l'ipotesi è una sola, ed è erronea, la causa di errore non viene ad elidersi. E perciò dobbiamo trovare un risultato erroneo. Se questo risultato è erroneo, non può essere, in generale, quello stesso che dà l'esperienza.

Si può però obbiettare: In certi casi, e rispetto a certi problemi scientifici, una sola ipotesi non basta per poter risolvere teoricamente il problema. Ed è giocoforza fare due o più ipotesi. Queste siano due. Possiamo allora dire che si verifica il caso rilevato da Poincaré, e rispetto al quale il metodo sperimentale viene ad essere in difetto.

Ciò che cade in difetto è invece il nostro raziocinio. Perchè noi possiamo dire:

Supponiamo che le ipotesi che ci conducono ad un risultato qualunque siano due, ma che una ipotesi sola sia scelta da noi arbitrariamente e sia erronea. L'altra ipotesi sia certamente vera, e sia, per fissare le idee, un risultato di esperienza. In questa caso la causa di errore viene a non elidersi. Ed in quanto non si elide, noi troviamo necessariamente un risultato erroneo, un risultato non conforme a quello dell'esperienza. Onde possiamo concludere col dire che l'ipotesi è erronea.

Questo modo di ragionare e di procedere noi possiamo sempre applicarlo al caso in cui un risultato vero è ottenuto per mezzo di due ipotesi da noi opportunamente scelte, e non sappiamo se queste siano realmente vere. Basta, difatti, combinare e far coesistere il risultato vero con una delle ipotesi. Se questa è erronea la causa di errore, essendo una sola, non si elide. Perciò troviamo un risultato erroneo. E da qui possiamo inferire che è erronea l'ipotesi.

E siccome un risultato vero può essere ottenuto per mezzo di due ipotesi erronee soltanto quando alle due ipotesi corrispondono due cause di errore che si elidono l'una con l'altra, così da essere erronea una delle ipotesi noi possiamo senz'altro inferire che deve essere erronea anche l'altra.

Oltre a questo principio noi dobbiamo aver presente il seguente altro, affermato da Galileo Galilei e da altri. Il principio che:

Due verità non possono contraddirsi. E conseguentemente quando due principi sono tra di loro contraddittori bisogna necessariamente che almeno uno di essi sia erroneo e non generalmente vero.

***

Consideriamo, per chiarire le idee, qualche esempio. Cominciamo dal concetto che Leonardo pone a base del metodo sperimentale, il concetto, cioè, che un principio, ed un solo principio, è vero in quanto le sue conseguenze sono confermate per vere dall' esperienza. Supponiamo che un corpo elastico di massa m e velocità v urti normalmente contro una superficie piana pure elastica, rimbalzando e riacquistando, dopo il rimbalzo, la velocità v eguale e contraria a quella che ha nell'istante che precede l'urto.

Possiamo dire, come da molti si ammette, che l'effetto prodotto sulla superficie elastica urtata, cioè la pressione di urto, è eguale alla variazione della quantità di moto, ossia a $mv-(-mv) = mv + mv = 2\,mv$? Per rispondere a questa domanda possiamo osservare: La stessa superficie sia urtata normalmente da un secondo corpo elastico di massa m_1 animato dalla velocità v_1, rimbalzando ecc. La corrispondente pressione p_1 dovrebbe essere data da $p_1 = 2\,m_1\,v_1$. Quindi dovrebbe essere:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{m\,v}{m_1\,v_1}. \text{ Cioè:}$$

Le pressioni d'urto dovrebbero stare fra di loro come le corrispondenti quantità di moto.

Supponiamo che le masse m, m_1 siano eguali. Ad esempio, si immagini di far cadere verticalmente un corpo elastico, di massa m, dalle altezze h e h_1 diverse. La densità del corpo e le altezze di caduta siano tali da poter trascurare la resistenza dell'aria. Dovremmo avere:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{m\,v}{m\,v_1} = \frac{v}{v_1} \text{ con } \begin{cases} v = \sqrt{2\,gh} \\ v_1 = \sqrt{2\,gh_1} \end{cases},$$

e dove g è l'accelerazione della gravità.

$$\text{Quindi: } \frac{p}{p_1} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h_1}}. \text{ Ossia:}$$

Rispetto ad uno stesso corpo elastico le pressioni d'urto dovrebbero stare fra di loro come le radici quadrate delle altezze di caduta.

Si supponga, per fissare meglio le idee, che l'altezza h_1 sia quadrupla di h, cioè che sia $h_1 = 4\,h$. Dovrebbe essere:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{4h}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad p_1 = 2p \quad .$$

Ora l'esperienza ci dice che questa relazione è falsa. Perchè l'esperienza ci dice che se un corpo elastico cade vercalmente sopra una superficie elastica dalle altezze h e $4\,h$, all'altezza di caduta quadrupla corrisponde una pressione d'urto pure quadrupla. In altri termini, l'esperienza ci dice che rispetto ad uno stesso corpo le pressioni stanno fra di loro come le altezze di caduta. E che quindi si ha:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{\frac{v^2}{2g}}{\frac{v_1^2}{2g}} = \frac{v^2}{v_1^2} .$$

Cioè: Rispetto ad uno stesso corpo urtante le pressioni dinamiche stanno fra

di loro come i quadrati delle velocità. E non già come le velocità.

Siccome, poi, $\frac{v^2}{v_1^2} = \frac{\frac{m v^2}{2}}{\frac{m v_1^2}{2}}$, e siccome $\frac{m v^2}{2}$ è l'energia di moto del corpo di massa m e velocità v, e $\frac{m v_1^2}{2}$ è l'energia di moto dello stesso corpo quando ha la velocità v_1, possiamo dire che:

Le pressioni d'urto stanno fra di loro come le relative energie di moto.

Questo principio è generalmente vero, come abbiamo visto in altre nostre note (1). Cioè se si indica con p la pressione d'urto esercitata da un corpo di massa m e velochità v, con p_1 quella di un corpo di massa m_1 e velocità v_1, diverse, si ha:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\frac{m v^2}{2}}{\frac{m_1 v_1^2}{2}}$$

Se ammettiamo questo principio non possiamo più ammettere, nel contempo, che debba essere $\frac{p}{p_1} = \frac{m v}{m_1 v_1}$. Perchè eguagliando i secondi membri delle espressioni di $\frac{p}{p_1}$ si otterrebbe $v = v_1$. Rispetto ad un terzo corpo elastico di velocità v_2, ecc. dovremmo avere $v = v_2$. E quindi $v = v_1 = v_2$. Il che è assurdo.

Per poter poi meglio sapere quale è il principio erroneo, noi possiamo pensare al caso di una data quantità d'acqua che cada da altezze diverse. Ber sappiamo che col duplicare, triplicare, quadruplicare dell'altezza di caduta di una data portata d'acqua (2) la pressione viene a duplicare, triplicare, quadruplicare. Quindi possiamo dire che rispetto ad una data quantità d'acqua le pressioni stanno fra di loro come le altezze di caduta. E non già come le radici quadrate di tali altezze.

***

Il principio che l'esperienza ci dice essere erroneo è quello da cui parte il Clausius nel suo studio del movimento delle molecole dei gas. Consideriamo un gas racchiuso in un cubo di lato l. Il Clausius presuppone che la pressione od effetto prodotto sopra una parete da un urto di una molecola è rappresentato dal doppio della quantità $m\,v$ di moto. Perchè, egli dice, la molecola urta prima la parete supposta perfettamente elastica e capace di invertire il senso della velocità, poscia torna indietro, e si ha per tal modo una variazione di quantità di moto eguale a $mv - (-mv) = 2\,mv$.

Orbene, il Clausius giunge ad un risultato vero per quanto parta da una ipotesi che abbiamo visto essere erronea. Il risultato, cioè, che le pressioni dei gas stanno fra di loro come le energie di moto delle relative molecole. Però egli giunge ad un risultato vero partendo da una ipotesi erronea solo in quanto elimina la causa di errore per mezzo di una seconda ipotesi. L'ipotesi che sia lecito di immaginare che le molecole dei gas si portino alternativamente da una parete alla parete opposta del recipiente che le contiene, descrivendo delle traiettorie di lunghezza $2\,l$, essendo l la distanza fra le pareti. Ed è per mezzo di questa ipotesi che il Clausius calcola il numero degli urti di una molecola nell'unità di tempo.

Però se noi non consideriamo, per il momento, questa seconda ipotesi, e ci limitiamo ad esaminare la prima, troviamo dei risultati assurdi e contraddetti dall'esperienza. Del pari troviamo dei risultati erronei e non confermati dall'esperienza quando esaminiamo da sola la seconda ipotesi. Quindi dobbiamo dire, come ci insegna Leonardo da Vinci, e come vuole il principio che Leonardo pone a fondamento del metodo

---

(1) Ing. GAETANO IVALDI: *La pressione d'urto e quella dei gas secondo il metodo sperimentale.* Giornale « Il Politecnico », 6. e 7 1921 — *Il principio di proporzionalità fra pressioni d'urto ed energie di moto e sulle sue conseguenze.* « Rassegna Tecnica Pugliese », fasc. 7 luglio 1921.

(2) Quantità d'acqua che cade nella unità di tempo.

sperimentale, che sono erronee entrambe le ipotesi.

***

Supponiamo, difatti, di avere due gas, ad esempio dell'ossigeno e dell'idrogeno. Siano:

p_0, p_H le pressioni unitarie, o per unità di superficie, corrispondenti all'ossigeno ed all'idrogeno;

n_0, n_H i numeri degli urti delle molecole di ossigeno e di idrogeno contro l'unità di superficie, nell'unità di tempo;

m_0, m_H le masse molecolari dell'ossigeno e dell'idrogeno;

v_0, v_H le velocità molecolari e medie dell'ossigeno e dell'idrogeno.

Secondo la prima ipotesi del Clausius dovrebbe essere:

$$\begin{cases} p_0 = 2\, n_0\, m_0\, v_0 \\ p_H = 2\, n_H\, m_H\, v_H \end{cases} \text{. E quindi: } \frac{p}{p_H} = \frac{n_0\, m_0\, v_0}{n_H\, m_H\, v_H}$$

Supponiamo che i due gas siano nelle stesse condizioni di pressione e di temperatura. Inoltre siano contenuti in cubi eguali di lato l. Indichiamo con d_0, d_H le densità, o pesi per unità di volume, dell'ossigeno e dell'idrogeno. Per le ipotesi testè fatte si ha, ricordando che la densità dell'ossigeno è 16 volte quella dell'idrogeno nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione:

$$\frac{m_0}{m_H} = \frac{d_0}{d_H} = \frac{16\, d_H}{d_H} = 16 \quad ; \quad m_0 = 16\, m_H \ .$$

Sappiamo poi che se due gas sono nelle stesse condizioni di pressione e di temperatura le rispettive velocità molecolari stanno fra di loro come le velocità di diffusione; che queste velocità di diffusione stanno fra di loro in ragione inversa della radice quadrata delle rispettive densità. Perciò viene:

$$\frac{v_0}{v_H} = \frac{\sqrt{d_H}}{\sqrt{d_0}} = \frac{\sqrt{d_H}}{\sqrt{16\, d_H}} = \frac{1}{4} \ ; \ v_0 = \frac{v_H}{4} \text{. Onde:}$$

$$m_0 v_0 = 16\, m_H \times \frac{v_H}{4} = 4\, m_H\, v_H \ .$$

Avendo presupposto che le pressioni siano uguali, cioè che $p_0 = p_H$, la relazione $\frac{p_0}{p_H} = \frac{n_0\, m_0\, v_0}{n_H\, m_H\, v_H}$ da:

$$1 = \frac{n_0}{n_H} \times \frac{m_0\, v_0}{m_H\, v_H} = \frac{n_0}{n_H} \times \frac{4\, m_H\, v_H}{m_H\, v_H} = 4\, \frac{n_0}{n_H}$$

$n_H = 4\, n_0$.

Possiamo quindi dire che:

Il numero di urti delle molecole di idrogeno contro l'unità di superficie, nell'unità di tempo, dovrebbe essere eguale a quattro volte quello delle molecole di ossigeno.

Ciò posto, consideriamo le energie di moto di una molecola di ossigeno e di una molecola di idrogeno. Si ha:

$$\frac{m_0\, v_0^2}{2} = \frac{16\, m_H \left(\frac{v_H}{4}\right)^2}{2} = \frac{m_H\, v_H^2}{2} \ .$$

Se ad ogni urto, tanto di una molecola di idrogeno che di ossigeno, corrisponde la stessa energia di moto;

se il numero di urti delle molecole di idrogeno, nella unità di tempo, è quattro volte quello delle molecole di ossigeno;

la energia di moto delle molecole di idrogeno che urtano l'unità di superficie nell'unità di tempo viene ad essere il quadruplo di quella delle molecole di ossigeno.

Quindi si ha che rispetto ad eguali superfici elastiche urtate ed eguali ad uno, e rispetto ad eguali intervalli di tempo (tempo uno), a diverse energie di moto dei corpi urtanti, e l'una quadrupla dell'altra, dovrebbero corrispondere delle eguali pressioni.

Ora l'esperienza ci dice che questo non è vero ed è falso. Perchè dalla esperienza ben si sa che nell'urto di un corpo elastico contro una superficie elastica ad una quadrupla energia di moto dei corpi urtanti corrisponde una pressione pure quadrupla, e non già, e mai delle pressioni eguali.

***

Se noi seguiamo il metodo sperimentale nel senso di Leonardo dobbiamo dire:

Una ipotesi è vera, ed è accettabile per vera, soltanto quando è conforme ai risultati che dà l'esperienza. Ora dalla esperienza si sa che i gas sono perfettamente elastici. Quindi viene ad essere lecito di far corrispondere l'urto della molecola di un gas contro la parete del recipiente che la contiene all'urto di un

corpo elastico contro una superficie elastica, e tale da invertire la velocità del corpo. Più precisamente, noi possiamo immaginare che una sfera elastica venga fatta cadere verticalmente sopra un piano elastico e tale da far ritornare la sfera al punto di partenza. Il corpo elastico ritorna al punto di partenza soltanto quando la sua velocità alla fine dell'urto è eguale e contraria a quella che ha all'inizio dell'urto. Onde possiamo dire che la superficie elastica urtata viene ad invertire la velocità del corpo. E dire che la sfera elastica ha per correlativa la molecola di un gas: la superficie elastica ha per corrispondente la parete del recipiente.

Supponiamo che le sfere elastiche siano due, di egual volume, ma di densità e pesi diversi corrispondenti alle molecole di due gas diversi. Determiniamo gli effetti esercitati sulla superficie elastica, o pressioni d'urto, sorreggendo questa superficie con una molla elastica, e misurando i raccorciamenti di questa durante l'urto. Possiamo noi dire che le pressioni sono eguali quando sono eguali le quantità di moto? Affatto. Perchè l'esperienza ci dice che se si indicano con P, P_1 i pesi delle due sfere, con h e h_1 le rispettive altezze di caduta, le pressioni sono eguali quando si ha $P\,h = P_1\,h_1$. E quindi, per le relazioni

$Ph = \frac{m\,v^2}{2}$; $P_1\,h_1 = \frac{m_1\,v_1^2}{2}$, possiamo dire che le pressioni sono eguali quando sono eguali le energie di moto dei corpi urtanti. E non già le quantità di moto.

Questo risultato è ben certo, perchè è un risultato di esperienza. E si tratta di esperienza vecchia e che è nota, o dovrebbe essere nota, da secoli. Difatti, essa risale ai tempi di Cartesio e di Newton, ed è descritta nel «Saggio della Filosofia del sig. cav. Isacco Newton», dato in luce dal sig. Enrico Pemberton, Venezia MDCCXXXIII; Lettera al dottor Mead, ecc. pag. 217 e segg.; estratto della dissertazione del Marchese Poleni in risposta all'opinione della quantità delle forze nei corpi, ecc., pag. 228 e seg. L'esperienza di che trattasi è la seguente:

Si abbiano due sfere di egual volume, ma di sostanze diverse e quindi di pesi diversi, e si facciano cadere da diverse altezze. Si misurino le pressioni d'urto per mezzo delle impressioni che vengono esercitate sopra una sostanza plastica, quale dell'argilla convenientemente inumidita. Si trova che le impressioni sono eguali, ed hanno la stessa profondità, e quindi sono eguali gli effetti e le pressioni esercitate dalle due sfere, quando le altezze delle cadute sono in ragione inversa dei pesi delle sfere. Quando cioè si ha, all'inizio degli urti, $Ph = P_1\,h_1$; $\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m_1\,v_1^2}{2}$; essendo P e P_1 i pesi delle sfere, h, h_1 le altezze di caduta, ecc.

***

Ciò posto, torniamo a considerare due volumi eguali di gas diversi, quali idrogeno ed ossigeno, nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione, racchiusi in cubi eguali di lato l.

In quanto, ad un istante qualunque, l'energia di moto e media di una molecola di idrogeno è eguale a quella che compete ad una molecola di ossigeno, possiamo dire che l'effetto o pressione corrispondente ad un urto di una molecola di idrogeno contro una parete di lato l, è eguale all'effetto, o pressione, relativo ad un urto di una molecola di ossigeno, contro una egual parete di lato l. Indichiamo con p questo eguale effetto o pressione. Se indichiamo con n_H il numero di urti delle molecole di idrogeno contro una porzione della parete eguale ad uno, nell'unità di tempo, e con p_H la pressione unitaria, o per unità di superficie, dell'idrogeno, deve essere: $p_H = n_H \times p$. Del pari se si indicano con n_0 gli urti delle molecole di ossigeno contro l'unità di superficie, nella unità di tempo, e con p_0 la pressione unitaria dell'ossigeno, deve essere:

$p_0 = n_0 \times p$. Onde $\frac{p_H}{p_0} = \frac{n_H \times p}{n_0 \times p} = \frac{n_H}{n_0}$.

E siccome, per ipotesi, $p_H = p_0$, si ottiene:

$$\frac{p_H}{p_0} = 1 = \frac{n_H}{n_0} : n_H = n_0 .$$

Possiamo pertanto dire:

Il numero degli urti delle molecole di idrogeno contro l'unità di superficie, nell'unità di tempo, è eguale al numero di urti delle molecole di ossigeno, ancora contro l'unità di superficie e nell'unità di tempo.

Se questo è vero per una superficie uno, è necessariamente pur vero rispetto a due pareti eguali di lato l. Perciò si ha che:

Rispetto all'unità di tempo, o per eguali intervalli di tempo, il numero degli urti delle molecole di idrogeno contro una parete di lato l è eguale al numero degli urti delle molecole di ossigeno contro una egual parete di lato l.

Ora, per la legge di Avogadro, e per le ipotesi fatte, il numero delle molecole di idrogeno è eguale al numero delle molecole di ossigeno. Se le molecole di idrogeno e di ossigeno sono in egual numero; se per eguali intervalli di tempo il numero di urti delle molecole di idrogeno contro la parete di lato l è eguale al numero di urti delle molecole di ossigeno contro una egual parete, necessariamente ne viene che il tempo che passa fra due urti successivi di una molecola di idrogeno è eguale a quello che passa fra due urti successivi di una molecola di ossigeno. Ma questo fatto non può verificarsi se non in quanto il tempo che impiega una molecola di idrogeno a descrivere una corrispondente orbita o traiettoria è eguale a quello che impiega una molecola di ossigeno a percorrere la relativa traiettoria.

Indichiamo con t questo tempo e con l_H la lunghezza della traiettoria descritta ritmicamente da una molecola di idrogeno, con l_0 quella di una molecola di ossigeno. Dev'essere:

$$\begin{cases} l_H = v_H \times t \\ l_0 = v_0 \times t \end{cases} ; \quad \frac{l_H}{l_0} = \frac{v_H}{v_0} .$$

E siccome $\frac{v_H}{v_0} = \frac{\sqrt{d_0}}{\sqrt{d_H}}$, si ottiene:

$\frac{l_H}{l_0} = \frac{\sqrt{d_0}}{\sqrt{d_H}}$. Cioè:

Le lunghezze delle traiettorie descritte dalle molecole di idrogeno e di ossigeno stanno fra di loro in ragione inversa della radice quadrata delle densità dei gas.

Se questo è vero, ed è vero perchè è la conseguenza di fatti e di ipotesi pienamente conformi ai risultati dell'esperienza, la seconda ipotesi del Clausius è necessariamente erronea ed illecita. Ed invero, applichiamo questa ipotesi a due volumi eguali di gas, quali idrogeno ed ossigeno, nelle stesse condizioni di temperatura e di pressione, racchiusi in cubi di lato l. Verremmo ad ammettere, per ipotesi, che sia lecito di immaginare che tanto le molecole di idrogeno che quelle di ossigeno descrivano ritmicamente delle traiettorie di eguale lunghezza, ed eguali a $2\,l$, essendo l la distanza fra due pareti opposte. L'ammettere questo non è lecito, perchè i dati forniti dall'esperienza, e secondo principi dall'esperienza pienamente confermati deve essere:

$$\frac{l_H}{l_0} = \frac{\sqrt{d_0}}{\sqrt{d_H}} = \frac{\sqrt{16\,d_H}}{\sqrt{d_H}} = 4 \quad ; \quad l_H = 4\,l_0 \quad .$$

E perciò possiamo dire che la lunghezza media della traiettoria descritta dalle molecole di idrogeno deve essere quattro volte quella relativa alle molecole di ossigeno. E non già eguale.

Concludendo, e tornando all'argomento trattato al principio della presente nota, possiamo dire che:

Se noi seguiamo il metodo sperimentale nel senso concepito da Leonardo Da Vinci, possiamo accertare che due ipotesi sono erronee ed illecite anche quando dalla loro coesistenza possiamo inferire, casualmente o maliziosamente, un risultato vero e conforme a quello che l'esperienza dà. Basta considerare separatamente, e da sole, le due ipotesi, invece di farle coesistere.

Genova, R. Liceo Colombo.

Ing. Gaetano Ivaldi.